Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

6 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a+b=c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными? (*И. Богданов*)

Ответ. 29.

Решение. Заметим, что если $a+b=c$, то все три числа a, b, c не могут оказаться одновременно нечётными. Следовательно, среди них есть как минимум одно чётное число, и последняя цифра этого числа также будет чётной. Таким образом, среди 30 цифр есть как минимум одна чётная, а нечётных — не более 29.

Пример $1\,999\,999\,999 + 1\,111\,111\,111 = 3\,111\,111\,110$, показывает, что среди 30 цифр могут оказаться ровно 29 нечётных.

Замечание. Примеров с 29 нечётными цифрами много — например, $3\,999\,999\,999 + 3\,999\,999\,999 = 7\,999\,999\,998$.

Комментарий. Только ответ без каких-либо верных пояснений — 0 баллов.

Только доказательство того, что нечётных цифр не более 29 — 3 балла.

Только верный пример с 29 нечётными цифрами — 3 балла.

9.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6? (*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y-x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x<y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \ldots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y-x$ чётно. Значит, $y-x$ делится на 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов;

Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

(1) Верно доказано лишь, что разность каких-то двух чисел x и y, расположенных в угловых клетках, делится на три – 2 балла.

(2) Рассмотрена шахматная раскраска и замечено, что числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разных цветов — 2 балла.

(3) После этого замечено, что все угловые клетки одного цвета, и *утверждается*, что тогда числа в клетках x и y одной чётности — ещё 2 балла.

Баллы за продвижения (1)–(3) суммируются. Заметим, что доказательство чётности разности $x-y$ может быть проведено и без использования шахматной раскраски — такое доказательство должно быть оценено соответственно.

Ниже приведены некоторые примечания по поводу них, а также некоторые ошибки, которые могут встретиться в работах.

($1'$) После получения (1) без обоснования утверждается, что числа x и y одной чётности — баллы не добавляются.

($2'$) Идея шахматной раскраски отдельно не оценивается.

($3'$) Даже после получения (2) и (3) утверждение о том, что x и y имеют одну чётность, *нуждается* в небольшом обосновании. Именно, требуется хотя бы упомянуть, что существует путь от x до y, на котором числа в соседних клетках отличаются на 3. (Такое упоминание может быть неявным, например, в индукционном рассуждении.) Если такого упоминания нет, за задачу ставится не более 6 баллов. В частности, критерии (1)–(3) как раз дают сумму 6.

Некоторые участники могут считать, что разность *любых* двух чисел в соседних клетках равна 3. Этот факт неверен; все рассуждения, опирающиеся на этот факт, оцениваются в 0 баллов.

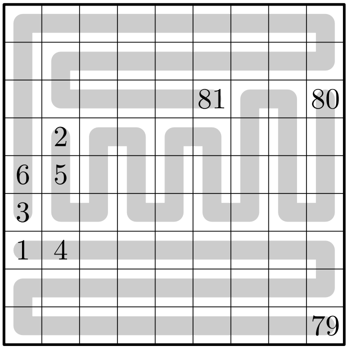

Рис. 1

Некоторые участники могут из утверждения. что любые числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разного цвета (в шахматной раскраске), сделать (неверный!) вывод, что *любые* два соседних числа имеют разную чётность. Если в работе присутствует подобная ошибка, за задачу выставляется не более 5 баллов. (5 баллов выставляется *только* тогда, когда этот аргумент применяется лишь к числам, имеющим один остаток при делении на 3.)

9.8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Пусть P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABD и ABC соответственно, а K — середина AB.

Достроим треугольник ABD до параллелограмма $ALBD$ (см. рис. 2); тогда $CL = CB + BL = BC + AD$. Диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке K, поэтому $DK = KL$. Поскольку $DP = \frac{2}{3}PK$, получаем $DP = \frac{1}{3}DL$, то есть $PL = 2DP$. Значит, по свойству биссектрисы в треугольнике CDL, точка P лежит на биссектрисе угла BCD тогда и только тогда, когда

$$\frac{CL}{CD} = \frac{PL}{PD} = 2,$$

то есть когда $AD + BC = 2CD$.

Аналогично, точка Q лежит на биссектрисе угла ADC при том же самом условии. Отсюда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Введём точки P и Q, как в предыдущем

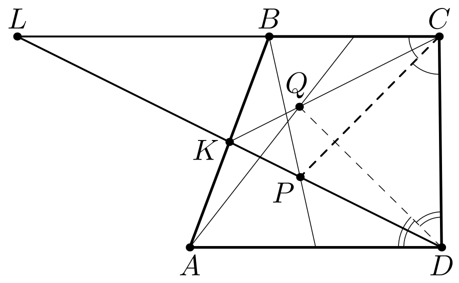

Рис. 2

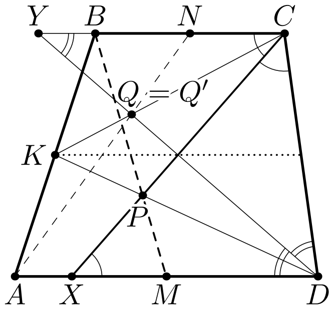

Рис. 3

решении. Пусть M и N — середины AD и BC соответственно. Наконец, пусть биссектрисы углов BCD и ADC пересекают прямые AD и BC в точках X и Y соответственно (см. рис. 3). Поскольку $\angle CXD = \angle XCB = \angle XCD$, имеем $CD = DX$. Аналогично, $CY = CD$.

Поскольку CX проходит через P, треугольники CPB и XPM подобны, причём
$$\frac{BC}{MX} = \frac{BP}{PM} = 2,$$
то есть $BC = 2MX$, Поэтому
$$2CD = 2(XM + MD) = 2MX + 2MD = BC + AD,$$
а значит, $2CY = 2CD = AD + BC$, откуда $NY = CY - BC/2 = AD/2$.

Пусть биссектриса DY пересекает медиану AN в точке Q'. Тогда треугольники $AQ'D$ и $NQ'Y$ подобны с коэффициентом $AD/NY = 2$. откуда $AQ'/Q'N = 2$. Значит, Q' совпадает с Q, что и требовалось доказать.

Замечание. Существуют и другие решения; в частности, можно решить задачу, не приходя к соотношению $AD + BC = 2CD$. Наметим один из таких путей.

Введём точки X и Y, как во втором решении. Равенства $CY = CD = DX$ означают, что $CDXY$ — ромб. Тогда точка S пересечения его диагоналей равноудалена от CY и DX, то есть лежит на средней линии трапеции $ABCD$.

Пусть K — середина AB; тогда $KP : PD = KQ : QC = 1 : 2$. Отсюда несложно вывести, что CP и DQ пересекаются на медиане треугольника KCD из вершины K — то есть опять же на средней линии трапеции $ABCD$. Это значит. что DQ проходит через S, что и требовалось.

Заметим дополнительно, что точка S является серединой средней линии.

Комментарий. Показано только, что из условия следует равенство $AD + BC = 2CD$ — 5 баллов (или 6 баллов, если все переходы в решении очевидно равносильны, но об этом нигде не сказано).

9.9. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $2n + 1$.

Первое решение. Назовём *длиной* слова количество букв в нём. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — буквы алфавита. Тогда нетрудно проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1\, a_2\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов большей длины.

Предположим, что в n-буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n + 2$. Тогда какая-то буква (скажем, a_1) встречается в нём хотя бы три раза. Отметим её второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P, а также не более одного раза после V, иначе вычёркиванием можно получить запрещённую последовательность. Значит, каждая из букв $a_2, \ldots, a_n$ встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из её вхождений стоит до V, а другое — после P.

Пусть a_1 встречается $k \geqslant 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k - 3$ буквы, отличных от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k - 3$ таких буквы. Остальные $n - k + 2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k + (k - 3) \cdot 1 + (n - k + 2) \cdot 2 = 2n + 1,$$

что противоречит нашему предположению.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что длина хорошего слова не превосходит $2n + 1$. Индукция по $n \geqslant 2$. В базовом случае $n = 2$ буквы в слове чередуются, и слово длины хотя бы 6 содержит фрагмент вида $ababab$, из которого вычёркиванием букв можно получить $aabb$.

Для перехода предположим, что в n-буквенном алфавите есть хорошее слово длины, не меньшей $2n + 2$. Тогда какая-то буква a встречается в этом слове хотя бы три раза. Предположим, что букв, встречающихся хотя бы 3 раза, две — a и b. Пусть, без ограничения общности, второе вхождение a стоит раньше второго вхождения b; тогда вычёркиванием букв можно получить слово $aabb$, что невозможно.

Значит, буква a встречается в слове $k \geqslant 3$ раз, а все остальные — максимум по два раза. Тогда длина слова не меньше, чем $2n + 2$, и не больше, чем $k + 2(n - 1)$, откуда $k \geqslant 4$.

Между вторым и третьим вхождением буквы a есть какая-то буква c. Эта буква не может встречаться в других местах: если она встречается после второго вхождения a, то вычёркиванием букв можно получить $aacc$, а если до него — то $ccaa$ (поскольку $k \geqslant 4$).

Пусть соседи буквы c различны. Тогда, удалив её из слова, мы получим хорошее слово в $(n - 1)$-буквенном алфавите (без буквы c). Длина этого слова будет не меньше $2n+1 = 2(n-1)+3$, что противоречит индукционному предположению.

Если же соседи буквы c одинаковы, удалим из слова c и букву перед ней; тогда на этом «стыке» останутся различные буквы. Поэтому мы опять получим хорошее слово в $(n - 1)$-буквенном алфавите, длина которого не меньше, чем $2(n-1)+2$; это опять же невозможно по индукционному предположению.

Комментарий. Только пример хорошего слова из $2n + 1$ букв — 1 балл (этот балл может суммироваться с упомянутыми далее).

Только доказательство, что в хорошем слове не более $2n+1$ букв — 6 баллов.

При доказательстве этой оценки доказано лишь, что максимум одна буква встречается более двух раз — 2 балла (из 6); эти баллы могут складываться с баллами за пример.

9.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Назовём набор из n чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Предположим, что красивый набор из $n > 100$ чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

Заметим, что если разность полученной прогрессии $d > 0$ имеет общий простой делитель p с каким-нибудь её членом, то все члены этой прогрессии делятся на p, а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на p. Разделим все эти числа на p (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на p и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, то есть также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел выбранного набора. Следовательно, d взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть a — максимальное число нашего красивого набора; тогда $a \geqslant n$. В прогрессии на доске будет не менее $n-1$ членов, кратных a. У каких-то двух из них номера отличаются не более, чем на $\frac{n(n-1)}{2} : (n-2) < n$, то есть разность этих членов (также делящаяся на a) равна kd при некотором $k \leqslant n-1 < a$. Но d взаимно просто с a, поэтому kd не может делиться на a — противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем красивый набор с наименьшей суммой и докажем, что разность прогрессии d взаимно проста с любым числом из набора. Далее нам понадобится следующий стандартный факт.

Лемма. *Пусть разность d арифметической прогрессии натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$ взаимно проста с числом k. Тогда числа, кратные k, идут в этой прогрессии с шагом k (то есть существует такое $i \leqslant k$, что члены, кратные k — это в точности $x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, \ldots$).*

Доказательство. Разности членов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют вид sd при $s < k$, и они не делятся на k. Поэтому все эти члены дают разные остатки при делении на k; значит, они дают все возможные остатки, и один из наших членов делится на k — пусть это x_i. Тогда член x_{i+t} будет делиться на k тогда и только тогда, когда $dt \,\vdots\, k$, то есть когда $t \,\vdots\, k$. $\square$

Пусть теперь p — простой делитель какого-то числа из нашего набора, а p^s — наибольшая степень p, делящая число набора. Пусть a — число из набора, делящееся на p^s. Хотя бы $n-1$ член прогрессии делится на a (и, как следствие, на p^s). Но разность прогрессии не делится на p; значит, лишь каждый p^s-й её член делится на p^s. Значит, в прогрессии хотя бы $p^s(n-2)+1$ членов, то есть $p^s(n-2)+1 \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$, откуда $p^s < n$.

С другой стороны, ни один из как минимум $n-1$ членов прогрессии, делящихся на p^s, не делится на p^{s+1}. Это значит, что количество таких членов меньше p, то есть $n-1 \leqslant p-1$, или $n \leqslant p$. Это противоречит неравенству выше.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда разность прогрессии взаимно проста с каждым её членом — 2 балла.

Лемма из второго решения считается известной; при отсутствии доказательства её (или её аналогов) баллы не снимаются.